IEEE Access
Multidisciplinary ⋮ Rapid Review ⋮ Open Access Journal

Received 11 December 2023, accepted 23 December 2023, date of publication 25 December 2023, date of current version 4 January 2024.

Digital Object Identifier 10.1109/ACCESS.2023.3347408

RESEARCH ARTICLE

# Reversible Self-Dual Codes Over the Ring $\mathbb{F}_2 + u\mathbb{F}_2$

**HYUN JIN KIM** [1] **AND WHAN-HYUK CHOI** [2]
[1]University College, Yonsei University, Yeonsu-gu, Incheon 21983, Republic of Korea
[2]Department of Mathematics, Kangwon National University, Chuncheon-si 24341, Republic of Korea

Corresponding author: Whan-Hyuk Choi (whchoi@kangwon.ac.kr)

The work of Hyun Jin Kim was supported by the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Korean Government under Grant NRF-2020R1F1A1A01071645. The work of Whan-Hyuk Choi was supported by NRF funded by the Korean Government under Grant NRF-2022R1C1C2011689.

**ABSTRACT** In this study, we introduce bisymmetric self-dual codes over the finite field $\mathbb{F}_2$ of order two. We developed a method to generate binary bisymmetric self-dual codes from a small-length bisymmetric self-dual code by increasing its length. Using this method, we produced binary bisymmetric self-dual codes and discovered that numerous such codes exhibit favorable parameters. Also, we defined the map from binary bisymmetric self-dual codes to reversible self-dual codes over the ring $\mathbb{F}_2+u\mathbb{F}_2$. This implies that there exists a one-to-one correspondence between the bisymmetric code over $\mathbb{F}_2$ and the reversible self-dual code over $\mathbb{F}_2 + u\mathbb{F}_2$. Consequently, using this map on generated bisymmetric self-dual codes, we obtained reversible self-dual codes over $\mathbb{F}_2 + u\mathbb{F}_2$, which were difficult to obtain using previously known methods.

**INDEX TERMS** Code over a ring, reversible self-dual code, eigenvectors, bisymmetric matrix, bisymmetric self-dual codes.

## NOTATION

| | |
|---|---|
| $C$ | A linear code. |
| $\mathcal{C}$ | A binary Code. |
| $\mathcal{D}$ | A code over $\mathbb{F}_2 + u\mathbb{F}_2$. |
| Aut($C$) | The automorphism group of $C$. |
| $\mathrm{Sym}_n$ | The symmetric group of degree $n$. |
| $\rho_1$ | $(1, 2n)(2, 2n - 1)\cdots(k, 2n - 1 + k)\cdots(n, n+1) \in \mathrm{Sym}_{2n}$. |
| $\rho_2$ | $(1, n + 1)(2, n + 2)\cdots(k, n + k)\cdots(n, 2n) \in \mathrm{Sym}_{2n}$. |
| $I_n$ | The identity matrix of degree $n$. |
| $R_n$ | The column reversed matrix of $I_n$. |
| $A^T$ | The transpose of a matrix $A$. |
| $A^F$ | The flip-transpose of a matrix $A$. |
| $A^r$ | The column reversed matrix of a matrix $A$. |

## I. INTRODUCTION

In this study, we consider codes over two distinct rings. The one is $\mathbb{F}_2$, the finite field of order two, and a code over $\mathbb{F}_2$ is called a binary code. The other is the ring $\mathbb{F}_2 + u\mathbb{F}_2 = \{0, 1, u, v = 1 + u\}$, which is defined as a 2-dimensional algebra over $\mathbb{F}_2$ where $u^2 = 0$. We denote this ring $\mathcal{R}$. Although the coding theory began with binary codes, codes over the ring $\mathcal{R}$ have attracted considerable attention owing to their usefulness in constructing Hermitian modular forms [2] and Gaussian lattices [8]. Self-dual codes over the ring $\mathcal{R}$ were introduced by Bachoc [1] and studied intensively in [3], [7], [8], [12], and [21].

Recently, some researchers found their application on DNA codes [9], [20]. DNA codes are made of four basic units which are called *nucleotides*: Adenine($A$), Cytosine($C$), Guanine($G$) and Thymine($T$). Siap et al. [22] identified the four symbols $A, C, G, T$ with the elements in $\mathcal{R}$, and constructed cyclic DNA codes considering the $GC$-content($GC$-weight) constraint over $\mathcal{R}$ and used the deletion distance. Our previous papers [5], [15] also introduced efficient and feasible algorithms for designing DNA codes from reversible self-dual codes over the finite field $GF(4)$. We could point out that our algorithms take advantage of the reversibility and self-duality of reversible self-dual codes over $GF(4)$ in [5], [15]. We expect similar algorithms for

The associate editor coordinating the review of this manuscript and approving it for publication was Zilong Liu.

designing DNA codes to apply to reversible self-dual codes over the ring $\mathbb{F}_2 + u\mathbb{F}_2$ as well.

We can determine all self-dual codes over $\mathcal{R}$ of length up to 8 in [8]. All *Lee-extremal* and *Lee-optimal* self-dual codes over $\mathcal{R}$ of lengths 9 through 24 with a non-trivial automorphism of odd order are classified in [11], [12], [13], [16], and [17]. For the details of codes over the ring $\mathcal{R}$, we refer [1], [12], [18], and for the details of reversible self-dual codes and their application on DNA codes, we refer [5], [14], [15].

In [14], the authors explored reversible self-dual codes and presented a construction method by augmenting a generator matrix with one row and two columns. This method is proven to construct all the binary reversible self-dual codes up to equivalence. However, this method is only applicable to binary codes with standard generator matrices in the form $(I_n \mid A)$, where $I_n$ is the identity matrix. We cannot generalize this method to codes over a ring: because code over a ring may not have a generator matrix in the form $(I_n \mid A)$, up to equivalence. This is the main motivation of this study.

In this study, we develop the construction method of reversible self-dual codes over $\mathcal{R}$. First, we determine the relationship between reversible self-dual codes over $\mathcal{R}$ and binary self-dual codes. Next, we introduce a novel construction method for orthogonal bisymmetric matrices and use them to generate *bisymmetric self-dual codes*, which mean self-dual codes having generator matrices in the form $(I_n \mid A)$, where $I_n$ is the identity matrix, and $A$ is a bisymmetric matrix. Finally, we obtain reversible self-dual codes over $\mathcal{R}$ of length $2n$ using the relationship between reversible self-dual codes over $\mathcal{R}$ and binary bisymmetric self dual codes. Furthermore, using this construction method, we obtain numerous optimal bisymmetric self-dual codes of various lengths, including the binary extremal bisymmetric self-dual codes of length 24, and six binary extremal bisymmetric self-dual codes of length 32, along with their corresponding reversible self-dual codes over $\mathcal{R}$.

The rest of this paper is organized as follows. In Section II, we introduce some definitions, some facts, and notations we need. Also, we describe the necessary and sufficient conditions for bisymmetric codes. Section III presents the relationship between reversible codes over $\mathcal{R}$ and bisymmetric codes. In Section IV, we introduce a novel construction method for bisymmetric self-dual codes. In Section V, we list our computation results obtained using our novel construction method. We then conclude this study in Section VI. All computations are performed using MAGMA [4].

## II. PRELIMINARIES

Let $A$ be a matrix of size $m \times n$ denoted by $(a_{ij})_{m\times n}$. We denote the transpose of $A$ by $A^T$,that is, $A^T = (a_{ji})_{n\times m}$. $A^F$ is the flip-transpose of $A$, which flips $A$ across its anti-diagonal, that is, $A^F = (a_{n-j+1,m-i+1})_{n\times m}$ and $A^r$ is the column-reversed matrix of $A$, that is, $A^r = (a_{i,n-j+1})_{m\times n}$. Let $I_n$ be the $n \times n$ identity matrix and $A$ be an $n \times n$ square matrix. Subsequently, a matrix $A$ is called *orthogonal* if $AA^T = I_n$, $A$ is called *symmetric* if $A = A^T$, $A$ is called *persymmetric* if $A = A^F$ and $A$ is called *bisymmetric* if $A = A^T = A^F$.

Let $A, B$ be $n \times n$ matrices and $R_n$ be the $n \times n$ anti-diagonal matrix whose anti-diagonal elements are all one, that is, $R_n = I_n^r$. The following properties are straightforward:

$$R_n^T = R_n^F = R_n, R_n^2 = I_n, A^F = R_n A^T R_n,$$
$$A^r = AR_n, (A^F)^F = A, (A^T)^F = (A^F)^T,$$
$$(A+B)^F = A^F + B^F, (AB)^F = B^F A^F.$$

Let $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ be $1 \times n$ matrices or regard them vectors of length $n$ by the context. The following properties are also straightforward:

$$(\mathbf{u}^r)^T = \mathbf{u}^F, (\mathbf{u}^r)^F = \mathbf{u}^T, (\mathbf{u}^F)^T = (\mathbf{u}^T)^F = \mathbf{u}^r,$$
$$\mathbf{u}\mathbf{v}^T = \mathbf{u}^r \mathbf{v}^F \ (\because \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}^r \cdot \mathbf{v}^r),$$
$$(\mathbf{u}^T\mathbf{v})^F = \mathbf{u}^F(\mathbf{v}^T)^F = \mathbf{u}^F\mathbf{v}^r, (\mathbf{u}^F\mathbf{v})^T = \mathbf{u}^T(\mathbf{v}^F)^T = \mathbf{u}^T\mathbf{v}^r.$$

Let $\mathscr{R}$ be a finite ring. A *linear code of length n over a ring* $\mathscr{R}$ is a $\mathscr{R}$-submodule of $\mathscr{R}^n$. In particular, a *binary code* is a linear code over $\mathbb{F}_2$. We call an element of code a *codeword* and the number of non-zero components in a codeword is called *weight* of the codeword. The space $\mathscr{R}^n$ is equipped with the standard inner product, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, where $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_n)$ are vectors in $\mathscr{R}^n$. For a code $C$ of length $n$ over $\mathscr{R}$, the *dual code* $C^\perp$ is defined by

$$C^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathscr{R}^n \mid \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0 \text{ for all } \mathbf{w} \in C\}.$$

A code $C$ is called *self-orthogonal* if $C \subset C^\perp$ and *self-dual* if $C = C^\perp$. It is obvious that binary self-dual codes are always even; every codeword has even weight. Binary self-dual codes that are doubly-even are called *Type II* codes; otherwise, they are called *Type I* codes.

Let $\mathrm{Sym}_n$ be the *symmetric group* on $\{1, \cdots, n\}$. Two codes of length $n$, $C$ and $C'$ are called *monomial equivalent* if there exists an $n \times n$ monomial matrix $M$ over $\mathscr{R}$ such that $C' = CM$. The codes are called *permutation equivalent* if there exists $P \in \mathrm{Sym}_n$ such that $C' = CP$. A permutation $P \in S_n$ is called an *automorphism* of $C$ if $C = CP$. The set of all automorphisms of $C$ forms the automorphism group $\mathrm{Aut}(C)$ of $C$.

We use the following notation throughout this paper.

A code is called *reversible* if it is invariant as a set under a reversal of each codeword [14]. In particular, for a code $C$ of length $2n$, $C$ is reversible if and only if $C = C\rho_1$ for $\rho_1 = \prod_{k=1}^n (k, 2n-k+1) = (1, 2n)(2, 2n-1)\cdots(k, 2n-k+1)\cdots(n, n+1) \in \mathrm{Sym}_{2n}$. A self-dual code that is reversible is called a *reversible self-dual code (RSD code in short)*. The properties of RSD codes are investigated in [14]. Since any binary self-dual code has an even length $2n$ for an integer $n$, it is clear that a binary self-dual code is reversible if and only if the code has $\rho_1$ as an automorphism. In [14], it is proved that if $C$ is a binary self-dual code with standard generator matrix $(I \mid A)$, $C$ is reversible if and only if $A$ is persymmetric:

*Lemma 1 [14, Lemma 3.3]:* Let $\mathcal{C}$ be a binary self-dual code of length $2n$ with generator matrix in the standard form

$(I_n \mid A)$, and let $\rho_1 = \prod_{k=1}^{n}(k, 2n-k+1) \in \mathrm{Sym}_{2n}$. Then $\rho_1 \in \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ if and only if $A$ satisfies one of the following:

(i) $(A^r)^2 = I_n$

(ii) $A$ is persymmetric.

However, one may consider a self-dual code having $\rho_2$ as an automorphism where $\rho_2 = \prod_{k=1}^{n}(k, n+k) \in \mathrm{Sym}_{2n}$.

*Lemma 2:* Let $\mathcal{C}$ be a binary self-dual code of length $2n$ with generator matrix in the standard form $(I_n \mid A)$ and let $\rho_2 = \prod_{k=1}^{n}(k, n+k) \in \mathrm{Sym}_{2n}$. Then $\rho_2 \in \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ if and only if $A$ is symmetric.

*Proof:* Suppose that $\rho_2 \in \mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ for a self-dual code $\mathcal{C}$ and $G = (I_n \mid A)$ is a generator matrix of $\mathcal{C}$. Then,

$$G\rho_2 = \left(A \middle| I_n\right)$$

generates $\mathcal{C}$ as well. Recall that since $\mathcal{C}$ is self-dual, $A$ is orthogonal, that is, $A^TA = I_n$. Thus, $A^T = A^{-1}$. It is easy to verify that $A^{-1}G$ is a generator matrix of $\mathcal{C}$ in the standard form since

$$A^{-1}G = \left(A^{-1}A \middle| A^{-1}I_n\right) = \left(I_n \middle| A^{-1}\right) = \left(I_n \middle| A^T\right).$$

The row vectors of $A^{-1}G$ and those of $(I_n \mid A)$ generate the same code $\mathcal{C}$; this implies $A^T = A$, thus $A$ is symmetric. The reverse argument proves the other direction immediately. ■

*Symmetric self-dual codes* were studied in [6] and [19]. We define a *bisymmetric self-dual code* in the following Definition.

*Definition 3: If a self-dual code $C$ of length $2n$ has a standard generator matrix $G = (I_n \mid A)$, where the matrix $A$ is bisymmetric, then $C$ is called a bisymmectric self-dual code.*

*Proposition 4: There exists a binary bisymmetric self-dual code for all even length $2n$.*

*Proof:* The matrix $\left(I_n \middle| I_n\right)$ generates a binary bisymmetric self-dual code of length $2n$ for every positive integer $n$. ■

*Example 5: There exist two trivial bisymmetric self-dual codes with generator matrices, $\left(I_n \middle| R_n\right)$ and $\left(I_n \middle| I_n\right)$.*

*Particularly, when $n = 2$, there exist only two distinct bisymmetric self-dual codes in the standard form with generator matrices,*

$$\left(I_2 \middle| R_2\right) = \begin{pmatrix} 1\ 0\ 0\ 1 \\ 0\ 1\ 1\ 0 \end{pmatrix},$$

*and*

$$\left(I_2 \middle| I_2\right) = \begin{pmatrix} 1\ 0\ 1\ 0 \\ 0\ 1\ 0\ 1 \end{pmatrix}.$$

*We denote these codes by $\mathcal{C}_4$ and $\mathcal{C}_4'$, respectively.*

Henceforth, we discuss the relationship between binary self-dual codes and self-dual codes over the ring $\mathcal{R}$. Let $\mathcal{D}$ be a self-dual code of length $n$ over the ring $\mathcal{R}$. It is well-known that the *Gray image* of $\mathcal{D}$ is a binary self-dual code of length $2n$ with a fixed-point-free automorphism of order two [2], [11]. The Gray map $\phi$ is defined as follows [8]:

$$\phi : \mathcal{R} \to \mathbb{F}_2^2 \text{ by } \phi(a+bu) = (a+b, b),$$

that is, simply $\phi(0) = 00, \phi(1) = 10, \phi(v) = 01$, and $\phi(u) = 11$. When $\mathbf{x}$ is in $\mathcal{R}^n$, we apply $\phi$ to each component of $\mathbf{x}$. This map is $\mathbb{F}_2$-linear, so $\phi(\mathcal{D})$ is a binary linear code of length $2n$, and $\phi(\mathcal{D})$ is called the *Gray image* of $\mathcal{D}$. Moreover, if $\mathcal{D}$ is self-dual, then $\phi(\mathcal{D})$ is a binary self-dual code of length $2n$ with a fixed-point-free automorphism $\rho = (1,2)(3,4)\ldots(2n-1,2n)$. Conversely, for a binary self-dual code $\mathcal{C}$ of length $2n$ having a fixed-point-free automorphism $\rho' = (a_1,b_1)(a_2,b_2)\ldots(a_n,b_n)$ of order two, we can find an equivalent code $\mathcal{C}'$ by rearranging the coordinates of $\mathcal{C}$ in the order of $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$. Subsequently, $\mathcal{C}'$ has the fixed-point-free automorphism $\rho = (1,2)(3,4)\cdots(2n-1,2n)$, and $\phi^{-1}(\mathcal{C}')$ is a self-dual code over $\mathcal{R}$. The following proposition in [2] summarizes the relation between self-dual codes over $\mathcal{R}$ and binary self-dual codes with fixed-point-free automorphism $\rho$.

*Proposition 6 [2, Proposition 4.3.]: There is a one-to-one correspondence between $\bar{\mathscr{C}}$ and $\bar{\mathscr{D}}$ given by*

$$[C] \to [\phi(C), \tau],$$

*where $\bar{\mathscr{C}}$ denote the set of equivalences of codes of length $n$ over $\mathcal{R}$, $\bar{\mathscr{D}}$ denote the set of equivalences of binary codes of length $2n$ with a fixed-point-free involution $\tau$, $[C]$ is an equivalence class containing $C$, and $[\phi(C), \tau]$ is an equivalence class containing $\phi(C)$ with $\tau \in \mathrm{Aut}(\phi(C))$.*

For the details of the relationship between self-dual codes over $\mathcal{R}$ and binary self-dual codes with fixed-point-free automorphism $\rho$, we refer [2], [11].

## III. THE RELATIONSHIP BETWEEN BISYMMETRIC CODES AND REVERSIBLE CODES

This section discusses the relationship between bisymmetric self-dual codes over $\mathbb{F}_2$ and reversible self-dual codes over $\mathcal{R}$. First, we consider the relationship between bisymmetric codes and their automorphisms.

*Theorem 7: Let $\mathcal{C}$ be a binary self-dual code of length $2n$ with generator matrix in the standard form $(I_n \mid A)$. Let $\rho_1 = \prod_{k=1}^{n}(k, 2n-k+1)$ and $\rho_2 = \prod_{k=1}^{n}(k, n+k) \in Sym_{2n}$. Then $\rho_1$ and $\rho_2$ are in $\mathrm{Aut}(\mathcal{C})$ if and only if $A$ is bisymmetric.*

*Proof:* It is shown by Lemmas 1 and 2. ■

We introduce a permutation map $\psi$, which defines a correspondence between binary bisymmetric self-dual codes of length $4n$ and RSD codes of length $2n$ over $\mathcal{R}$.

Henceforth, we denote $\mathcal{D}$ and $\mathcal{C}$ as an RSD code of length $2n$ over $\mathcal{R}$ and a binary self-dual code of length $4n$, respectively. Recall that the Gray map $\phi$ on a codeword $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ as

$$\phi(\mathbf{x}) = (x_{1,1}, x_{1,2}, \cdots, x_{2n,1}, x_{2n,2}) \in \mathbb{F}_2^{4n}$$

for $x_{k,1} = a_k + b_k$ and $x_{k,2} = b_k$ where $x_k = a_k + b_k u$ is the $k$-th coordinate of codeword $\mathbf{x}$. $\phi(\mathcal{D})$ is a binary self-dual code of length $4n$ with a fixed-point-free automorphism $\rho = (1,2)(3,4)\ldots(4n-1,4n)$, since $\mathcal{D}$ has length $2n$.

We define a permutation map $\psi$ acting on $\phi(\mathbf{x})$ as follows:

$$\psi(\phi(\mathbf{x})) = (x_{1,1}, x_{2,1}, \cdots, x_{n,1}, x_{n+1,2}, \cdots, x_{2n,2}, x_{2n,1}, \cdots, x_{n+1,1}, x_{n,2}, \cdots, x_{2,2}, x_{1,2}).$$

Clearly, $\mathcal{C} = \psi(\phi(\mathcal{D}))$ is a binary self-dual code of length $4n$ which is equivalent to $\phi(\mathcal{D})$. Subsequently, we have the following theorem.

*Theorem 8: Let $\psi$ and $\phi$ be maps defined above. Let $\sigma = \prod_{k=1}^{2n}(k, 4n-k+1) \in Sym_{4n}$ and $\tau = \prod_{k=1}^{2n}(k, 2n+k) \in Sym_{4n}$. Assume that $\mathcal{D}$ is an RSD code of length $2n$ over $\mathcal{R}$ and $\mathcal{C} = \psi(\phi(\mathcal{D}))$. Subsequently, $\sigma$ and $\tau$ are automorphisms of $\mathcal{C}$.*

*Proof:* Recall that $\phi(\mathcal{D})$ has the permutation $\rho = (1,2)(3,4)\cdots(2k-1,2k)\cdots(4n-1,4n) \in \mathrm{Sym}_{4n}$ as an automorphism, and the permutation $\rho$ permutes each pair of $x_{k,1}$ and $x_{k,2}$ for all $1 \le k \le 2n$ of every codeword $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$.

The map $\psi$ is defined to rearrange all the elements $x_{k,1}$ and $x_{k,2}$ for all $1 \le k \le 2n$ of every codeword $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ such that $\sigma = \prod_{k=1}^{2n}(k, 4n-k+1) \in \mathrm{Sym}_{4n}$ is to be an automorphism of $\psi(\phi(\mathcal{D}))$.

Regarding $\tau$, we use the reversibility of $\mathcal{D}$. Since $\mathcal{D}$ is reversible, the permutation $\rho_1 = \prod_{k=1}^{n}(k, 2n-k+1) \in \mathrm{Sym}_{2n}$ is an automorphism of $\mathcal{D}$, which means that for every codeword $\mathbf{x} = (x_i) \in \mathcal{D}$, $\mathbf{x}^r = (x_{\rho_1(i)})$ is also a codeword in $\mathcal{D}$. The transposition of two elements $x_i$ and $x_{2n-i+1}$ in $\mathbf{x}$ corresponds to two different transpositions under the map $\phi$, the transposition of $x_{i,1}$ and $x_{2n-i+1,1}$ and the transposition of $x_{i,2}$ and $x_{2n-i+1,2}$ of $\phi(\mathbf{x})$. It is easy to verify that the map $\psi$ rearranges elements $x_{k,1}$ and $x_{k,2}$ for all $1 \le k \le 2n$ of every codeword $\mathbf{x} = (x_i) \in \mathcal{D}$ so that $\tau = \prod_{k=1}^{2n}(k, 2n+k) \in \mathrm{Sym}_{4n}$ is to be an automorphism of $\psi(\phi(\mathcal{D}))$. ■

*Corollary 9: For any bisymmetric self-dual code $\mathcal{C}$ over $\mathbb{F}_2$, there exists a reversible self-dual code $\mathcal{D} = \phi^{-1}(\psi^{-1}(\mathcal{C}))$.*

*Proof:* It is straightforward, as evident from Theorem 7, 8, and Proposition 6. ■

*Example 10: (i) From the trivial bisymmetric self-dual code $\mathcal{C}_4$ with the generator matrix*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

*we obtain $\phi^{-1}(\psi^{-1}(\mathcal{C}_4))$, a reversible self-dual code over $\mathcal{R}$ with the generator matrix*

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix},$$

*whereas from the trivial bisymmetric self-dual code $\mathcal{C}'_4$ with the generator matrix*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

*we obtain $\phi^{-1}(\psi^{-1}(\mathcal{C}'_4))$, a reversible self-dual code over $\mathcal{R}$ with the generator matrix*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*(ii) Let $\mathcal{E}_8$ and $\mathcal{E}'_8$ be equivalent extremal bisymmetric self-dual codes with the generator matrices*

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&1&1&0 \\ 0&1&0&0&1&0&1&1 \\ 0&0&1&0&1&1&0&1 \\ 0&0&0&1&0&1&1&1 \end{pmatrix},$$

*and*

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&1&1&0 \\ 0&1&0&0&1&1&0&1 \\ 0&0&1&0&1&0&1&1 \\ 0&0&0&1&0&1&1&1 \end{pmatrix},$$

*respectively.*

*We verify that the RSD code $\phi^{-1}(\psi^{-1}(\mathcal{E}_8))$ over $\mathcal{R}$ has the generator matrix*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & u & v \\ 0 & 1 & 1 & u \end{pmatrix},$$

*whereas the RSD code $\phi^{-1}(\psi^{-1}(\mathcal{E}'_8))$ over $\mathcal{R}$ has the generator matrix*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & v \\ 0 & u & 0 & u \\ 0 & 0 & u & u \end{pmatrix},$$

*which shows that $\phi^{-1}(\psi^{-1}(\mathcal{E}_8))$ and $\phi^{-1}(\psi^{-1}(\mathcal{E}'_8))$ are neither permutation equivalent nor monomial equivalent.*

*Remark 11: We highlight that the map $(\psi \circ \phi)^{-1}$ does not preserve the equivalence. As we can see in Example 10, even if two bisymmetric self-dual codes $\mathcal{C}$ and $\mathcal{C}'$ in Example 10 are (permutation) equivalent to each other, reversible self-dual codes $\phi^{-1}(\psi^{-1}(\mathcal{C}))$ and $\phi^{-1}(\psi^{-1}(\mathcal{C}'))$ are neither monomial nor permutation equivalent.*

## IV. CONSTRUCTION OF BISYMMETRIC SELF-DUAL CODES

*Proposition 12: Let $\mathbf{x}$ be a binary vector of length $2n$, and let $A$ be a $2n \times 2n$ bisymmetric matrix. Subsequently,*

*(i) $AR_{2n} = R_{2n}A$.*
*(ii) $\mathbf{x}\mathbf{x}^F = \mathbf{x}^r\mathbf{x}^T = 0$.*
*(iii) $\mathbf{x}\mathbf{x}^T = \mathbf{x}^r\mathbf{x}^F$, that is, $\mathbf{x}\mathbf{x}^T + \mathbf{x}^r\mathbf{x}^F = 0$*
*(iv) if $\mathbf{x}$ is an eigenvector of $A$ ($A\mathbf{x}^T = \mathbf{x}^T$), then $\mathbf{x}A = \mathbf{x}$, $A\mathbf{x}^F = \mathbf{x}^F$, and $\mathbf{x}^rA = \mathbf{x}^r$.*
*(v) if $\mathbf{x}$ is an eigenvector of $AR_{2n}$ ($AR_{2n}\mathbf{x}^T = \mathbf{x}^T$), then $A\mathbf{x}^F = \mathbf{x}^T$, $\mathbf{x}A = \mathbf{x}^r$, $A\mathbf{x}^T = \mathbf{x}^F$, and $\mathbf{x}^rA = \mathbf{x}$.*

*Proof:*

(i) Since $A$ is bisymmetric, $A = A^F = R_{2n}A^TR_{2n} = R_{2n}AR_{2n}$. Therefore, $AR_{2n} = R_{2n}A$.
(ii) $\mathbf{x}\mathbf{x}^F = \mathbf{x}^r\mathbf{x}^T = \sum_{i=1}^{2n} x_ix_{2n-i+1} = 2\sum_{i=1}^{n} x_ix_{2n-i+1} = 0$.
(iii) $\mathbf{x}\mathbf{x}^T + \mathbf{x}^r\mathbf{x}^F = \mathbf{x}\mathbf{x}^T + \mathbf{x}R_{2n}R_{2n}\mathbf{x}^T = 2\mathbf{x}\mathbf{x}^T = 0$
(iv) Since $\mathbf{x}$ is an eigenvector of $A$, $A\mathbf{x}^T = \mathbf{x}^T$. If we transpose both sides, $\mathbf{x}A = \mathbf{x}$. $A\mathbf{x}^F = AR_{2n}\mathbf{x}^T = R_{2n}A\mathbf{x}^T = R_{2n}\mathbf{x}^T = \mathbf{x}^F$. $\mathbf{x}^rA = \mathbf{x}R_{2n}A = \mathbf{x}AR_{2n} = \mathbf{x}R_{2n} = \mathbf{x}^r$.
(v) Since $\mathbf{x}$ is an eigenvector of $AR_{2n}$, $AR_{2n}\mathbf{x}^T = \mathbf{x}^T$. Therefore, $A\mathbf{x}^F = AR_{2n}\mathbf{x}^T = \mathbf{x}^T$. If we flip both sides, $\mathbf{x}A = (\mathbf{x}^T)^F = \mathbf{x}^r$. $A\mathbf{x}^T = AR_{2n}R_{2n}\mathbf{x}^T = R_{2n}AR_{2n}\mathbf{x}^T = R_{2n}\mathbf{x}^T = \mathbf{x}^F$, and $\mathbf{x}^rA = \mathbf{x}^rR_{2n}R_{2n}A = \mathbf{x}AR_{2n} = \mathbf{x}^rR_{2n} = \mathbf{x}$. ■

*Theorem 13:* Let $A$ be a bisymmetric(symmetric and persymmetric) matrix and $(I_n \mid A)$ be a generator matrix of a binary bisymmetric self-dual code of length $4n$.

Subsequently, the matrix

$$\left(I_{2n+2}|A'\right) = \left(I_{2n+2}\left|\begin{array}{c|c|c} a & \mathbf{x} & b \\ \hline \mathbf{x}^T & A+E & \mathbf{x}^F \\ \hline b & \mathbf{x}^r & a \end{array}\right.\right)$$

generates a binary bisymmetric self-dual code of length $4n+4$ where $a$, $b$ and a vector $\mathbf{x}$ and a matrix $E$ are decided as follows:

(i) If $A$ has an eigenvector $\mathbf{x}$ of eigenvalue one with odd weight, then

$$a = b = 0, E = \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r.$$

(ii) If $A$ has an eigenvector $\mathbf{x}$ of eigenvalue one with even weight such that $\mathbf{x} = \mathbf{x}^r$, or if $\mathbf{x}$ is the zero vector, then set

$$a = 1, b = 0, E = O.$$

(iii) If $AR$ has an eigenvector $\mathbf{x}$ of eigenvalue one with odd weight, then

$$a = b = 1, E = \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r.$$

(iv) If $AR$ has an eigenvector $\mathbf{x}$ of eigenvalue one with even weight such that $\mathbf{x} = \mathbf{x}^r$, or if $\mathbf{x}$ is the zero vector, then

$$a = 0, b = 1, E = O.$$

*Proof:* By the assumption, we have that $AA = I_{2n}$. It is easy to check that $E$ is bisymmetric, therefore $A'$ is also a bisymmetric matrix. Thus, we only to show that $A'$ is orthogonal, that is. $A'(A')^T = A'A' = I_{2n+2}$.

Case (i) Since $\mathbf{x}$ has an odd weight, we have $\mathbf{x}\mathbf{x}^T = 1$ and $\mathbf{x}^r\mathbf{x}^F = 1$. Since $\mathbf{x}$ is an eigenvector of $A$, we know that $A\mathbf{x}^T = \mathbf{x}^T$, $A\mathbf{x}^F = \mathbf{x}^F$, $\mathbf{x}A^T = \mathbf{x}$, and $\mathbf{x}^rA^T = \mathbf{x}^r$.

$$\begin{aligned}
&(A + \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r)(A + \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r) \\
&\quad = AA + A\mathbf{x}^T\mathbf{x} + A\mathbf{x}^F\mathbf{x}^r + \mathbf{x}^T\mathbf{x}A + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^rA \\
&\qquad + (\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r)(\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r) \\
&\quad = I_{2n} + \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r + \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r \\
&\qquad + (\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r)(\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r) \\
&\quad = I_{2n} + \mathbf{x}^T\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{x}\mathbf{x}^F\mathbf{x}^r + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r\mathbf{x}^F\mathbf{x}^r \\
&\quad = I_{2n} + \mathbf{x}^T\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^T0\mathbf{x}^r + \mathbf{x}^F0\mathbf{x} + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r\mathbf{x}^F\mathbf{x}^r \\
&\quad = I_{2n} + \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r.
\end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned}
A'(A')^T &= \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & \mathbf{x} & 0 \\ \hline \mathbf{x}^T & A + \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r & \mathbf{x}^F \\ \hline 0 & \mathbf{x}^r & 0 \end{array}\right)^2 \\
&= \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{x}\mathbf{x}^T & \mathbf{x}A^T + \mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}\mathbf{x}^F\mathbf{x}^r & \mathbf{x}\mathbf{x}^F \\ \hline \ldots & \mathbf{x}^T\mathbf{x} + (I_{2n} + \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r) + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r & \ldots \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & \mathbf{x} + 1\mathbf{x} + 0\mathbf{x}^r & 0 \\ \hline \ldots & \mathbf{x}^T\mathbf{x} + (I_{2n} + \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r) + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r & \ldots \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & O & 0 \\ \hline O^T & I_{2n} & O^F \\ \hline 0 & O^R & 1 \end{array}\right) \\
&= I_{2n+2}.
\end{aligned}$$

Here, '...' means that the block does not need to be calculated, because of the bisymmetricity of the matrix $A'(A')^T$. Indeed, the only four blocks we calculated determine the whole matrix $A'(A')^T$.

Case (ii) By the assumption, $\mathbf{x} = \mathbf{x}^r$, thus $\mathbf{x}^F = \mathbf{x}^T$. Since $\mathbf{x}$ has an even weight, we have $\mathbf{x}\mathbf{x}^T = 0$ and $\mathbf{x}^r\mathbf{x}^F = 0$. Since $\mathbf{x}$ is an eigenvector of $A$, $A\mathbf{x}^T = \mathbf{x}^T$, $A\mathbf{x}^F\mathbf{x}^F$, $\mathbf{x}A^T = \mathbf{x}$, $\mathbf{x}^rA^T = \mathbf{x}^r$. Therefore,

$$\begin{aligned}
A'(A')^T &= \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & \mathbf{x} & 0 \\ \hline \mathbf{x}^T & A & \mathbf{x}^F \\ \hline 0 & \mathbf{x}^r & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & \mathbf{x} & 0 \\ \hline \mathbf{x}^T & A & \mathbf{x}^F \\ \hline 0 & \mathbf{x}^r & 1 \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c|c} 1 + \mathbf{x}\mathbf{x}^T & \mathbf{x} + \mathbf{x}A & \mathbf{x}\mathbf{x}^F \\ \hline \ldots & \mathbf{x}^T\mathbf{x} + AA + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r & \ldots \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & \mathbf{x} + \mathbf{x} & 0 \\ \hline \ldots & I_{2n} + \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{x} & \ldots \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & O & 0 \\ \hline O^T & I_{2n} & O^F \\ \hline 0 & O^r & 1 \end{array}\right) \\
&= I_{2n+2}.
\end{aligned}$$

Case (iii) Since $\mathbf{x}$ has an odd weight, we have $\mathbf{x}\mathbf{x}^T = 1$ and $\mathbf{x}^r\mathbf{x}^F = 1$. Since $\mathbf{x}$ is an eigenvector of $AR$, $A\mathbf{x}^F = \mathbf{x}^T$, $A\mathbf{x}^T = \mathbf{x}^F$, $\mathbf{x}A^T = \mathbf{x}^r$, $\mathbf{x}^rA = \mathbf{x}$.

$$\begin{aligned}
&(A + \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r)(A + \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r) \\
&\quad = AA + A\mathbf{x}^T\mathbf{x} + A\mathbf{x}^F\mathbf{x}^r + \mathbf{x}^T\mathbf{x}A + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^rA \\
&\qquad + (\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r)(\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r) \\
&\quad = I_{2n} + \mathbf{x}^F\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{x}^r + \mathbf{x}^T\mathbf{x}^r + \mathbf{x}^F\mathbf{x} \\
&\qquad + (\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r)(\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r) \\
&\quad = I_{2n} + 0 + \mathbf{x}^T\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{x}\mathbf{x}^F\mathbf{x}^r + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r\mathbf{x}^T\mathbf{x} \\
&\qquad + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r\mathbf{x}^F\mathbf{x}^r \\
&\quad = I_{2n} + \mathbf{x}^T\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^T0\mathbf{x}^r + \mathbf{x}^F0\mathbf{x} + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r\mathbf{x}^F\mathbf{x}^r \\
&\quad = I_{2n} + \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r.
\end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned}
A'(A')^T &= \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & \mathbf{x} & 1 \\ \hline \mathbf{x}^T & A + \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r & \mathbf{x}^F \\ \hline 1 & \mathbf{x}^r & 1 \end{array}\right)^2 \\
&= \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{x}\mathbf{x}^T & \mathbf{x} + \mathbf{x}A^T + \mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}\mathbf{x}^F\mathbf{x}^r + \mathbf{x}^r & \mathbf{x}\mathbf{x}^F \\ \hline \ldots & \mathbf{x}^T\mathbf{x} + (I_{2n} + \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r) + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r & \ldots \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & \mathbf{x} + \mathbf{x}^r + 1\mathbf{x} + 0\mathbf{x}^r + \mathbf{x}^r & 0 \\ \hline \ldots & \mathbf{x}^T\mathbf{x} + (I_{2n} + \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r) + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r & \ldots \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right)
\end{aligned}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & O & 0 \\ \hline O^T & I_{2n} & O^F \\ \hline 0 & O^r & 1 \end{array}\right)$$
$$= I_{2n+2}.$$

Case (iv) $\mathbf{x}$ has an even weight, that is, $\mathbf{x}\mathbf{x}^T = 0$ and $\mathbf{x}^r\mathbf{x}^F = 0$. Since $\mathbf{x}$ is an eigenvector of $AR$, $A\mathbf{x}^F = \mathbf{x}^T, A\mathbf{x}^T = \mathbf{x}^F$, $\mathbf{x}A^T = \mathbf{x}^r, \mathbf{x}^r A = \mathbf{x}$.

$$A'(A')^T = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & \mathbf{x} & 1 \\ \hline \mathbf{x}^T & A & \mathbf{x}^F \\ \hline 1 & \mathbf{x}^r & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & \mathbf{x} & 1 \\ \hline \mathbf{x}^T & A^T & \mathbf{x}^F \\ \hline 1 & \mathbf{x}^r & 0 \end{array}\right)$$
$$= \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{x}\mathbf{x}^T+1 & \mathbf{x}A^T+\mathbf{x}^r & \mathbf{x}\mathbf{x}^F \\ \hline \cdots & \mathbf{x}^T\mathbf{x}+AA^T+\mathbf{x}^F\mathbf{x}^r & \cdots \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right)$$
$$= \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{x}\mathbf{x}^T+1 & \mathbf{x}^r+\mathbf{x}^r & \mathbf{x}\mathbf{x}^F \\ \hline \cdots & AA^T & \cdots \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right)$$
$$= \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & O & 0 \\ \hline O^T & I_{2n} & O^F \\ \hline 0 & O^R & 1 \end{array}\right)$$
$$= I_{2n+2}.$$

■

The following examples illustrate our construction methods of binary bisymmetric self-dual codes and RSD codes over $\mathcal{R}$.

*Example 14: The extremal bisymmetric self-dual code $\mathcal{E}_8$ in Example 10 has the generator matrix*

$$(I_4|A) = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&1&1&0 \\ 0&1&0&0&1&0&1&1 \\ 0&0&1&0&1&1&0&1 \\ 0&0&0&1&0&1&1&1 \end{pmatrix},$$

*and it is easy to check that eigenspaces of matrix $A$ and $AR$ corresponding to one are both generated by* $\{(1,0,0,1),(0,1,1,0)\}$. *Therefore, $A$ and $AR$ have only even weight eigenvectors of eigenvalue one. If we take the eigenvector $\mathbf{x} = (1,0,0,1)$, then $\mathbf{x} = \mathbf{x}^r$ and applying the method (ii) in Theorem 13, we obtain a generator matrix of a bisymmetric [12, 6, 4] code*

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1 \\ 0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&1 \end{pmatrix}.$$

*If we proceed to apply the map $\phi^{-1} \circ \psi^{-1}$ on this [12, 6, 4] code, we obtain a RSD code of length 6 over $\mathcal{R}$ having the generator matrix*

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&u&u&1 \\ 0&1&0&0&1&u \\ 0&0&1&v&0&u \end{pmatrix}.$$

*Example 15: The matrix*

$$(I_6|A) = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1&1 \\ 0&0&0&1&0&0&1&1&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&0 \end{pmatrix}$$

*is a generator matrix of a bisymmetric self-dual [12, 6, 4] code. The eigenspaces of matrix A corresponding to one is generated by row vectors of*

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&1&0&1 \\ 0&1&0&1&0&1 \\ 0&0&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1 \end{pmatrix}.$$

*If we take the odd weight eigenvector $\mathbf{x} = (1,0,0,1,0,1)$ to apply the method i) in Theorem 13, we obtain the matrix*

$$E = \mathbf{x}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^F\mathbf{x}^r = \begin{pmatrix} 0&0&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&1 \\ 1&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0 \end{pmatrix},$$

*we consequently obtain a generator matrix of an extremal bisymmetric self-dual [16, 8, 4] code*

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

*If we proceed to apply the map $\phi^{-1} \circ \psi^{-1}$ on this extremal [16, 8, 4] code, we obtain a RSD code of length 8 over $\mathcal{R}$ having the generator matrix*

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&v&1&0 \\ 0&1&0&0&v&0&v&1 \\ 0&0&1&0&1&v&0&v \\ 0&0&0&1&0&1&v&1 \end{pmatrix}.$$

## V. EXTREMAL BISYMMETRIC SELF-DUAL CODES AND REVERSIBLE SELF-DUAL CODES OVER $\mathcal{R}$

A binary self-dual code is called type II if the weight of all its codewords is divisible by 4. Otherwise, it is called type I. In [10], it was reported that there exists unique extremal self-dual type II codes of length 24 over $\mathbb{F}_2$. Using the bisymmetric construction method, we obtain the type II self-dual code of length 24 over $\mathbb{F}_2$ in bisymmetric form.

*Theorem 16:* There exists the extremal bisymmetric self-dual type II [24, 12, 8] code with a generator matrix,

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&1&0&1&0&1&1 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&1&1&0&1 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0&1&1&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&1&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&1&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&1&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&0&1&1&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&1&1&0&0&1 \end{pmatrix},$$

whose weight enumerator is

$$x^{24} + 759x^{16}y^8 + 2576x^{12}y^{12} + 759x^8y^{16} + y^{24}.$$

We denote this code by $\mathcal{E}_{24}$.

In Table 1, we illustrate a chain of self-dual codes constructed by using Theorem 13, successively from a [4,2,2] code $\mathcal{C}_4$ to a [24,12,8] code $\mathcal{E}_{24}$.

We give generator matrices of all the bisymmetric self-dual codes in the building-up chain from $\mathcal{C}_4$ to $\mathcal{E}_{24}$ in Table 1.

- A bisymmetric self-dual [4,2,2] code $\mathcal{C}_4$ with

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&1 \\ 0&1&1&0 \end{pmatrix}.$$

**TABLE 1. Construction of the extremal code $\mathcal{E}_{24}$.**

| Length | Method | **x** | min. wt. |
|---|---|---|---|
| 4 | $\mathcal{C}_4$ | | 2 |
| 8 | ii) | 11 | 4 |
| 12 | ii) | 0110 | 4 |
| 16 | iii) | 0101 01 | 4 |
| 20 | ii) | 1010 0101 | 4 |
| 24 | iii) | 0011 0101 01 | 8 |

- A bisymmetric self-dual extremal [8,4,4] code with

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&1&1&0\\ 0&1&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&1&0&1&1&1 \end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [12,6,4] code with

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&1&1\\ 0&0&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&1 \end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual extremal [16,8,4] code with

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&1 \end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [20,10,4] code with

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&1&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0&1&1&1\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&1&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&1&0&1&1 \end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual extremal [24,12,8] code with

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&1&0&1&0&1&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0&1&1&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&0&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&1&1&0&0&1 \end{pmatrix}$$

- $\mathcal{D}_{12} = \phi^{-1}(\psi^{-1}(\mathcal{E}_{24}))$:

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&1&0&1&0&1&1&0&1&u\\ 0&1&0&1&0&1&1&u&0&1&0&1\\ 0&0&1&1&0&0&1&v&1&v&1&1\\ 0&0&0&u&0&0&1&1&0&u&1&v\\ 0&0&0&0&1&1&1&v&0&u&u&0\\ 0&0&0&0&0&u&0&u&1&v&v&1 \end{pmatrix}$$

In [10], it was reported that there exist eight inequivalent extremal self-dual codes of length 32 over $\mathbb{F}_2$. Among them, three codes are type I and five are type II. Using the bisymmetric construction method, we found all the inequivalent type I and three inequivalent type II self-dual codes of length 32 over $\mathbb{F}_2$ in bisymmetric form.

*Theorem 17:* There exist at least six extremal bisymmetric self-dual codes of length 32 over $\mathbb{F}_2$, and we denote each extremal code by $\mathcal{E}_{32}^i$ for $1 \le i \le 6$. Among them, $\mathcal{E}_{32}^1$, $\mathcal{E}_{32}^2$, and $\mathcal{E}_{32}^3$ are type I, whereas $\mathcal{E}_{32}^4$, $\mathcal{E}_{32}^5$, $\mathcal{E}_{33}^6$ are type II.

- $\mathcal{E}_{32}^1$ is an extremal type I self-dual code which has the generator matrix in the bisymmetric form:

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&1&0&0&1&0&0&1&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&0&1&0&0&0&1&1&1&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&1&0&1&1&1&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&0&1&1&1&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&1&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&0&1&0
\end{pmatrix},$$

whose weight enumerator is $W_1(x, y) = x^{32} + 364x^{24}y^8 + 2048x^{22}y^{10} + 6720x^{20}y^{12} + 14336x^{18}y^{14} + 18598x^{16}y^{16} + 14336x^{14}y^{18} + 6720x^{12}y^{20} + 2048x^{10}y^{22} + 364x^8y^{24} + y^{32}$.

- $\mathcal{E}_{32}^2$ is an extremal type I self-dual code that has the generator matrix in the bisymmetric form:

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&1&1&1&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&1&0&1&1&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&1&0&1&1&0&0&1&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&a&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&1&0&0&1&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&1&0&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&1&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0
\end{pmatrix},$$

whose weight enumerator is $W_1(x, y)$.

- $\mathcal{E}_{32}^3$ is an extremal type I self-dual code that has the generator matrix in the bisymmetric form:

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&0&0&1&1&1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&1&1&1&0&1&1&1&0&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&0&1&1&1&1&0&0&1&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&1&0&0&0&1&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&1&1&0&1&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&1&0&1&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&1&1&1&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&1&1&1&1&0&1&0&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&1&0&1&1&1&0&1&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&1&1&0&0&0&1&1&0
\end{pmatrix},$$

whose weight enumerator is $W_1(x, y)$.

- $\mathcal{E}_{32}^4$ is an extremal type II self-dual code that has the generator matrix in the bisymmetric form:

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&1&0&0&1&1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&1&1&1&1&1&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&1&0&1&1&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&1&0&1&0&1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&1&0&1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&1&1
\end{pmatrix},$$

whose weight enumerator is $W_2(x, y) = x^{32} + 620x^{24}y^8 + 13888x^{20}y^{12} + 36518x^{16}y^{16} + 13888x^{12}y^{20} + 620x^8y^{24} + y^{32}$.

- $\mathcal{E}_{32}^{5}$ is an extremal type II self-dual code that has the generator matrix in the bisymmetric form:

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&0&1&0&1&0&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&1&1&0&1&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&0&1&0&1&1
\end{pmatrix},$$

  whose weight enumerator is $W_2(x, y)$.

- $\mathcal{E}_{32}^{6}$ is an extremal type II self-dual code which has the generator matrix in the bisymmetric form:

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&1&1&0&1&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&1&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&1&1&1&1&1&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&1&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&1&0&1&1&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&1
\end{pmatrix},$$

  whose weight enumerator is $W_2(x, y)$.

In the following, we illustrate the chain of bisymmetric self-dual codes consecutively constructed from $\mathcal{C}_4$ to the extremal codes $\mathcal{E}_{32}^{3}$ using Theorem 13.

**TABLE 2.** Construction of the extremal code $\mathcal{E}_{32}^{3}$.

| Length | Method | **x** | min. wt. |
|---|---|---|---|
| 4 | $\mathcal{C}_4$ | | 2 |
| 8 | ii) | 11 | 4 |
| 12 | iv) | 1001 | 4 |
| 16 | ii) | 101101 | 4 |
| 20 | i) | 00010110 | 4 |
| 24 | iii) | 0101111101 | 6 |
| 28 | iii) | 011000100000 | 6 |
| 32 | i) | 11000110011100 | 8 |

- A bisymmetric self-dual [4, 2, 2] Code over GF(2)

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&1\\
0&1&1&0
\end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [8, 4, 4] Code over GF(2)

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&1&1&1&0\\
0&1&0&0&1&0&1&1\\
0&0&1&0&1&1&0&1\\
0&0&0&1&0&1&1&1
\end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [12, 6, 4] Code over GF(2)

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1\\
0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&0\\
0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&1&0
\end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [16, 8, 4] Code over GF(2)

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&1&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&1&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&1&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&1&1
\end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [20, 10, 4] Code over GF(2)

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&1&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&1&1&1&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&1&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0
\end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [24, 12, 6] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&0&1&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&0&1&1&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&1&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&0&1&0&1&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1&0&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&0&0&1&1&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&1&0&1&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&1
\end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [28, 14, 6] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&0&1&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&1&1&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&0&1&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&1&0&0&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&1&0&1&1&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&1&1&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&1&1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1
\end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual code $\mathcal{E}_{32}^{3}$.

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&0&0&1&1&1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&1&1&1&0&1&1&1&0&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&0&1&1&1&1&0&0&1&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&1&0&0&0&1&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&1&1&0&1&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&1&0&1&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&1&1&1&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&1&1&1&1&0&1&0&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&1&0&1&1&1&0&1&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&1&1&0&0&0&1&1&0
\end{pmatrix}$$

- We provide examples of reversible self-dual codes over $\mathcal{R}$ made from extremal bisymmetric self-dual codes, using Corollary 9. $\mathcal{D}_{16}^{3} = \phi^{-1}(\psi^{-1}(\mathcal{E}_{32}^{3}))$:

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&u&1&0&u&1&1&v&1\\
0&1&0&0&0&0&1&0&v&0&v&0&1&u&1&u\\
0&0&1&0&0&0&0&0&v&0&v&1&u&1&u&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&u&1&0&u&0&1\\
0&0&0&0&1&0&1&0&u&0&1&v&0&1&0&v\\
0&0&0&0&0&1&1&0&v&1&v&0&v&v&u&1\\
0&0&0&0&0&0&u&0&0&1&v&1&u&0&1&u\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&v&u&0&v&v&u
\end{pmatrix}$$

## VI. CONCLUSION

In this study, we introduced bisymmetric self-dual codes and their construction method and investigated their relationship with reversible self-dual codes over $\mathcal{R} = \mathbb{F}_2 + u\mathbb{F}_2$, where $u^2 = 0$. Using this construction method, we succeeded in constructing numerous extremal bisymmetric self-dual codes, and we consequently obtained reversible self-dual codes over $\mathbb{F}_2 + u\mathbb{F}_2$, which were difficult to obtain using previously known methods.

We point out that there are two well-known methods of constructing self-dual codes over $\mathcal{R}$ as far as we know. The first is Proposition 4.3 in [2], and this method can generate all self-dual codes over a certain length. However, to use this method, we must have all binary self-dual codes with a fixed-point-free involution. Also, we need to collect and classify only the reversible codes among all the generated codes to get the reversible self-dual codes. Hence, computational complexity gets much higher than our method as the code's length increases. The second is the decomposition method introduced in [12]. It is the method of constructing self-dual codes with an automorphism of odd order over $\mathcal{R}$. However, every reversible self-dual code has an automorphism of even order. Therefore, our method is novel and efficient in generating reversible self-dual codes over $\mathcal{R}$, which is our paper's main contribution.

In future work, we aim to investigate the application of reversible self-dual codes over $\mathcal{R}$ over DNA codes.

## APPENDIX. CONSTRUCTION OF EXTREMAL SELF-DUAL CODES OF LENGTH 32

In Table 3, we summarize constructions of bisymmetric self-dual codes, starting from the code $\mathcal{C}_4$ up to the extremal codes $\mathcal{E}_{32}^1$ using Theorem 13. We then illustrate the chain of bisymmetric generator matrices consecutively constructed.

**TABLE 3.** Construction of the extremal code $\mathcal{E}_{32}^1$.

| Length | Method | $\mathbf{x}$ | min. wt. |
|---|---|---|---|
| 4 | $\mathcal{C}_4$ | | 2 |
| 8 | iv) | 00 | 2 |
| 12 | ii) | 1111 | 4 |
| 16 | ii) | 011110 | 4 |
| 20 | i) | 10001111 | 4 |
| 24 | iii) | 0010001010 | 6 |
| 28 | iii) | 110010011000 | 6 |
| 32 | i) | 10111010100010 | 8 |

- A bisymmetric self-dual code over GF(2)

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&1\\ 0&1&1&0 \end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [8, 4, 2] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [12, 6, 4] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1\\ 0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [16, 8, 4] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&0&1 \end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [20, 10, 4] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&1&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&1&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [24, 12, 6] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&1 \end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [28, 14, 6] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&0&0&1&1&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&1&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&0&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&1&1&1 \end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual code $\mathcal{E}_{32}^1$

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&1&0&0&1&0&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&0&1&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&1&0&1&1&1&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&0&1&1&1&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&1&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&0&1&0 \end{pmatrix}$$

- $\mathcal{D}_{16}^1 = \phi^{-1}(\psi^{-1}(\mathcal{E}_{32}^1))$:

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&v&v&0&v&0&v\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&u&1&0&u&1\\ 0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&v&v&u&1&1&u\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&1&v&1&1&0&v&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1&v&1&v&1&u&u&u\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&1&v&0&0&0&u&1&v\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&u&v&v&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&u&1&u&v&u&u&1&u&v \end{pmatrix}$$

In Table 4, we summarize constructions of bisymmetric self-dual codes, starting from the code $\mathcal{C}_4$ up to the extremal codes $\mathcal{E}_{32}^2$ using Theorem 13. We then illustrate the chain of bisymmetric generator matrices consecutively constructed.

- A bisymmetric self-dual [4,2,2] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&1\\ 0&1&1&0 \end{pmatrix}$$

**TABLE 4.** Construction of the extremal code $\mathcal{E}^2_{32}$.

| Length | Method | $\mathbf{x}$ | min. wt. |
|---|---|---|---|
| 4 | $\mathcal{C}_4$ | | 2 |
| 8 | iv) | 11 | 4 |
| 12 | iv) | 1111 | 4 |
| 16 | ii) | 000000 | 2 |
| 20 | i) | 10001010 | 4 |
| 24 | i) | 0111100111 | 6 |
| 28 | iii) | 111010101111 | 6 |
| 32 | i) | 00101100010111 | 8 |

- A bisymmetric self-dual [8,4,4] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&1&1&1\\ 0&1&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&1&1&1&1&0 \end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [12,6,4] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1\\ 0&1&0&0&0&0&1&0&1&1&1&1\\ 0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&1&1\\ 0&0&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0 \end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [16,8,2] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [20,10,4] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [24,12,6] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&1&1&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&1&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&1&0&0&1&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&1&1&0&1&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&0&1&1&1&1&0&0 \end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [28,14,6] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&1&0&1\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&1&1&0&1&1&1&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&0&1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual code $\mathcal{E}^2_{32}$

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&1&1&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&1&0&1&1&1\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&1&0&1&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&1&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&1&0&0&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&1&0&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&1&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

- $\mathcal{D}^2_{16} = \phi^{-1}(\psi^{-1}(\mathcal{E}^2_{32}))$:

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&v&u&u&0&v&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&v&v&0&1&0&u&1&1\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&u&u&0&u&v\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&v&u&1&v&0&u&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&u&0&v&u&1&u\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&1&v&1&u&1&1&0&u\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&u&1&v&1&u&0&v&v\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&u&1&0&v&1&v&0 \end{pmatrix}$$

In Table 5, we summarize constructions of bisymmetric self-dual codes, starting from the code $\mathcal{C}'_4$ up to the extremal codes $\mathcal{E}^4_{32}$ using Theorem 13. We then illustrate the chain of bisymmetric generator matrices consecutively constructed.

**TABLE 5.** Construction of the extremal code $\mathcal{E}^4_{32}$.

| Length | Method | $\mathbf{x}$ | min. wt. |
|---|---|---|---|
| 4 | $\mathcal{C}'_4$ | | 2 |
| 8 | ii) | 00 | 2 |
| 12 | iv) | 1111 | 4 |
| 16 | iv) | 011110 | 4 |
| 20 | iii) | 00001101 | 4 |
| 24 | i) | 1101110110 | 6 |
| 28 | i) | 001101011101 | 6 |
| 32 | iii) | 10010000100011 | 8 |

- A bisymmetric self-dual [4, 2, 2] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix} 1&0&1&0\\ 0&1&0&1 \end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [8, 4, 2] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [12, 6, 4] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1\\ 0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0 \end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [16, 8, 4] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&1&0&0 \end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [20, 10, 4] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&1&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&0&0&0&1
\end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [24, 12, 6] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&0&1&1&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&1&1&0&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&1&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&1&0&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&1&1&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&1&1&1&0&1&1&0
\end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [28, 14, 6] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&1&1&0&1&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&1&1&0&1&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&1&0&1&1&1&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&1&1&1&1&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&1&0&1&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1&1&0&1&0&1&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&1&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&0
\end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual code $\mathcal{E}_{32}^4$.

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&1&0&0&1&1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&1&1&1&1&1&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&1&0&1&1&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&1&0&1&0&1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&1&0&1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&1&1
\end{pmatrix}$$

- $\mathcal{D}_{16}^4 = \phi^{-1}(\psi^{-1}(\mathcal{E}_{32}^4))$:

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&v&1&1&0&0&u&0&u\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&v&u&v&v&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&1&v&0&u&0&0&v&u\\
0&0&0&1&0&0&0&0&u&v&1&v&v&0&v&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&v&v&u&u&v&u&u&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&v&u&1&0&v&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&v&0&1&v&v&v&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&v&0&v&u&1&0&v
\end{pmatrix}$$

In Table 6, we summarize constructions of bisymmetric self-dual codes, starting from the code $\mathcal{C}_4'$ up to the extremal codes $\mathcal{E}_{32}^5$ using Theorem 13. We then illustrate the chain of bisymmetric generator matrices consecutively constructed.

- A bisymmetric self-dual [4, 2, 2] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix}
1&0&1&0\\
0&1&0&1
\end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [8, 4, 2] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1
\end{pmatrix}$$

**TABLE 6.** **Construction of the extremal code $\mathcal{E}_{32}^5$.**

| Length | Method | $\mathbf{x}$ | min. wt. |
|---|---|---|---|
| 4 | $\mathcal{C}_4'$ | | 2 |
| 8 | ii) | 00 | 2 |
| 12 | iv) | 1111 | 4 |
| 16 | iv) | 011110 | 4 |
| 20 | iii) | 00001101 | 4 |
| 24 | i) | 1101110110 | 6 |
| 28 | i) | 001101011101 | 6 |
| 32 | iii) | 10101000111111 | 8 |

- A bisymmetric self-dual [12, 6, 4] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1\\
0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&1\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0
\end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [16, 8, 4] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&1&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&1&0&0
\end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [20, 10, 4] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&1&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&0&0&0&1
\end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [24, 12, 6] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&0&1&1&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&1&1&0&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&1&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&1&0&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&1&1&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&1&1&1&0&1&1&0
\end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [28, 14, 6] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&1&1&0&1&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&1&1&0&1&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&1&0&1&1&1&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&1&1&1&1&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&1&0&1&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1&1&0&1&0&1&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&1&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&0
\end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual code $\mathcal{E}_{32}^5$.

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&0&1&0&1&0&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&1&1&0&1&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&0&1&0&1&1
\end{pmatrix}$$

- $\mathcal{D}_{16}^5 = \phi^{-1}(\psi^{-1}(\mathcal{E}_{32}^5))$:

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&v&v&u&v&0&v\\
0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&u&1&1&v&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&u&v&u&u&u&1&v\\
0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&v&1&u&1&v\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&u&v&u&u&u\\
0&0&0&0&0&1&0&1&0&v&0&1&1&v&1&v\\
0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&v&0&1&u&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&u&1&1&1&u&u&0&u&1
\end{pmatrix}$$

In Table 7, we summarize constructions of bisymmetric self-dual codes, starting from the code $\mathcal{C}_4'$ up to the extremal codes $\mathcal{E}_{32}^6$ using Theorem 13. We then illustrate the chain of bisymmetric generator matrices consecutively constructed.

**TABLE 7.** Construction of the extremal code $\mathcal{E}_{32}^6$.

| Length | Method | $\mathbf{x}$ | min. wt. |
|---|---|---|---|
| 4 | $\mathcal{C}_4'$ | | 2 |
| 8 | ii) | 00 | 2 |
| 12 | iv) | 1111 | 4 |
| 16 | iv) | 011110 | 4 |
| 20 | iii) | 00001101 | 4 |
| 24 | i) | 1101110110 | 6 |
| 28 | i) | 001101011101 | 6 |
| 32 | iii) | 01100000101100 | 8 |

- A bisymmetric self-dual [4, 2, 2] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix}
1&0&1&0\\
0&1&0&1
\end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [8, 4, 2] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1
\end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [12, 6, 4] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1\\
0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&1\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0
\end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [16, 8, 4] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&1&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&1&0&0
\end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [20, 10, 4] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&1&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&1&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&0&0&0&1
\end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [24, 12, 6] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&0&1&1&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&1&1&0&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&1&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&1&0&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&0&1&1&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&1&1&1&0&1&1&0
\end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual [28, 14, 6] code over GF(2)

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&1&1&0&1&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0&1&1&0&1&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&1&0&1&1&1&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&1&1&1&1&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&1&0&1&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1&1&0&1&0&1&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&1&0&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&0
\end{pmatrix}$$

- A bisymmetric self-dual code $\mathcal{E}_{32}^6$

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&1&1&0&1&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&1&1&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0&1&1&1&1&1&1&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&1&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&1&0&1&1&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&1
\end{pmatrix}$$

- $\mathcal{D}_{16}^6 = \phi^{-1}(\psi^{-1}(\mathcal{E}_{32}^6))$:

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&v&u&0&0&u\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&v&u&v&v&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&v&1&u&u&0&0&v&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&u&v&1&v&v&0&v&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&u&v&u&u&u\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&v&v&0&1&u&v&v\\
0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&v&1&v&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1&u&v&0&1
\end{pmatrix}$$

## ACKNOWLEDGMENT

The authors would like to thank to the reviewers for helpful suggestions, which help to improve the clarity of this article.

## REFERENCES

[1] C. Bachoc, "Applications of coding theory to the construction of modular lattices," *J. Combinat. Theory A*, vol. 78, no. 1, pp. 92–119, Apr. 1997.

[2] E. Bannai, M. Harada, T. Ibukiyama, A. Munemasa, and M. Oura, "Type II codes over $\mathbb{F}_2 + u\mathbb{F}_2$ and applications to Hermitian modular forms," *Abhandlungen Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, vol. 73, no. 1, pp. 13–42, Dec. 2003.

[3] R. A. L. Betty, and A. Munemasa, "Classification of self-dual codes of length 20 over $\mathbb{Z}_4$ and length at most 18 over $\mathbb{F}_2 + u\mathbb{F}_2$," in *Proc. 17th IMA Int. Conf. Cryptogr. Coding (IMACC)*, in Lecture Notes in Computer Science, vol. 11929, 2019, pp. 64–77.

[4] W. Bosma and J. Cannon, "The Magma algebra system. I. The user language," *J. Symbolic Comput.*, vol. 24, pp. 235–265, 1997.
[5] W.-H. Choi, H. J. Kim, and Y. Lee, "Construction of single-deletion-correcting DNA codes using CIS codes," *Designs, Codes Cryptogr.*, vol. 88, no. 12, pp. 2581–2596, Dec. 2020.
[6] W. H. Choi and J. L. Kim, "An improved upper bound on self-dual codes over finite fields GF(11), GF(19), and GF(23)," *Designs, Codes Cryptogr.*, vol. 90, no. 11, pp. 2735–2751, Nov. 2022.
[7] S. T. Dougherty, P. Gaborit, M. Harada, A. Munemasa, and P. Sole, "Type IV self-dual codes over rings," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 45, no. 7, pp. 2345–2360, Nov. 1999.
[8] S. T. Dougherty, P. Gaborit, M. Harada, and P. Sole, "Type II codes over $\mathbb{F}_2 + u\mathbb{F}_2$," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 45, no. 1, pp. 32–45, Jan. 1999.
[9] T. Abualrub, A. Ghrayeb, and X. N. Zeng, "Construction of cyclic codes over for DNA computing," *J. Franklin Inst.*, vol. 343, nos. 4–5, pp. 448–457, Jul. 2006.
[10] W. C. Huffman, "On the classification and enumeration of self-dual codes," *Finite Fields Appl.*, vol. 11, no. 3, pp. 451–490, Aug. 2005.
[11] W. C. Huffman, "On the decomposition of self-dual codes over $\mathbb{F}_2 + u\mathbb{F}_2$ with an automorphism of odd prime order," *Finite Fields Appl.*, vol. 13, pp. 681–712, Jul. 2007.
[12] W. C. Huffman, "Self-dual codes over $\mathbb{F}_2 + u\mathbb{F}_2$ with an automorphism of odd order," *Finite Fields Appl.*, vol. 15, pp. 277–293, Jun. 2009.
[13] H. J. Kim, "Lee-extremal self-dual codes over $\mathbb{F}_2 + u\mathbb{F}_2$ of lengths 23 and 24," *Finite Fields Appl.*, vol. 29, pp. 18–33, Sep. 2014.
[14] H. J. Kim, W.-H. Choi, and Y. Lee, "Construction of reversible self-dual codes," *Finite Fields Appl.*, vol. 67, Oct. 2020, Art. no. 101714.
[15] H. J. Kim, W.-H. Choi, and Y. Lee, "Designing DNA codes from reversible self-dual codes over $GF(4)$," *Discrete Math.*, vol. 344, Jan. 2021, Art. no. 112159.
[16] H. J. Kim and Y. Lee, "Construction of extremal self-dual codes over $\mathbb{F}_2 + u\mathbb{F}_2$ of an automorphism of odd order," *Finite Fields Appl.*, vol. 18, pp. 971–992, Sep. 2012.
[17] H. J. Kim and Y. Lee, "Hermitian self-dual codes over $\mathbb{F}_2 + u\mathbb{F}_2$," *Finite Fields Appl.*, vol. 25, pp. 106–131, Jan. 2014.
[18] H. J. Kim, H. Lee, J. B. Lee, and Y. Lee, "Construction of self-dual codes with an automorphism of order $p$," *Adv. Math. Commun.*, vol. 5, no. 1, pp. 23–36, 2011.
[19] J.-L. Kim and W.-H. Choi, "Self-dual codes, symmetric matrices, and eigenvectors," *IEEE Access*, vol. 9, pp. 104294–104303, 2021.
[20] J.-L. Kim and D. E. Ohk, "DNA codes over two noncommutative rings of order four," *J. Appl. Math. Comput.*, vol. 68, no. 3, pp. 2015–2038, Jun. 2022.
[21] M. Shi, Y. Liu, and P. Sole, "Optimal two weight codes from trace codes over $\mathbb{F}_2 + u\mathbb{F}_2$," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 20, no. 12, pp. 2346–2349, Oct. 2016.
[22] I. Siap, T. Abualrub, and A. Ghrayeb, "Cyclic DNA codes over the ring based on the deletion distance," *J. Franklin Inst.*, vol. 346, no. 8, pp. 731–740, Oct. 2009.

**HYUN JIN KIM** received the B.S. degree in mathematics from the University of Seoul, Seoul, South Korea, in 2001, and the M.S. and Ph.D. degrees in mathematics from Yonsei University, Seoul, in 2011. From 2011 to 2013, he was a Postdoctoral Fellow with Ewha Womans University, Seoul, where he was a Research Professor, from 2013 to 2016. He has been an Assistant Professor with the University College, Yonsei University, since 2016. His research interests include error-correcting codes and designing DNA codes related to DNA computing.

**WHAN-HYUK CHOI** received the B.S. degree in mechanics and aerospace engineering from Seoul National University, Seoul, South Korea, in 2000, and the M.S. and Ph.D. degrees in mathematics from Kangwon National University, Chuncheon-si, South Korea, in 2017. From 2018 to 2021, he was a Research Professor with Kangwon National University and then a Research Associate with Sogang University, Seoul. From 2021 to 2023, he was a Visiting Professor with the Department of Biomedical Engineering, UNIST, Ulsan, South Korea. He is currently an Assistant Professor with the Department of Mathematics, Kangwon National University. His research interests include error-correcting codes over finite fields, designing DNA codes related to DNA computing and DNA data storage, and bio-informatics.